ZUM PHASENÜBERGANG 2. ORDNUNG BEI RÄUMLICH BEGRENZTEN SUPRALEITERN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Eckhard Schöler
aus Bochum

Göttingen 1966

Zum Phasenübergang 2. Ordnung bei räumlich begrenzten Supraleitern

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Eckhard Schöler
aus Bochum

Göttingen
1966

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

D 7

Referent: Prof. Dr. G. Lüders

Korreferent: Prof. Dr. M. Kohler

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Nov. 1966

Zum Phasenübergang 2. Ordnung bei räumlich begrenzten Supraleitern

Übersicht

		Seite
	Zusammenfassung	1
1.	Einleitung	2
2.	Bestimmung des Phasenübergangs 2. Ordnung mittels des Funktionals $\Phi^{(2)}$	11
3.	Zur Handhabung der eichinvarianten Boltzmann-gleichung	17
4.	Ableitung der Randbedingung für die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung	21
5.	Ableitung der Randbedingungen für die verallgemeinerte und linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung 4. Ordnung bei reinen Supraleitern	31
	Anhang	44

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544307_0034

Zusammenfassung

Die Lückenfunktion $\Delta(\underline{r})$ im Phasenübergang 2. Ordnung bei Supraleitern mit einer die Elektronen spiegelnd reflektierenden Oberfläche wird mittels des thermodynamischen Variationsprinzips approximiert durch solche Funktionen, welche im Innern des Supraleiters mit $\Delta(\underline{r})$ übereinstimmen und in der Nähe der Oberfläche dieselbe langsame Veränderlichkeit haben wie im Innern. Der Phasenübergang wird charakterisiert mit Hilfe eines Funktionals $\Phi^{(2)}$ von $\Delta(\underline{r})$. Das Funktional $\Phi^{(2)}$ wird berechnet mit der Methode der Korrelationsfunktion von de Gennes und von Lüders, welche auch die Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche berücksichtigt. Mit Hilfe des Funktionals $\Phi^{(2)}$ wird gezeigt, daß unabhängig von den Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche für die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung die wohlbekannte Randbedingung $\underline{n}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\Delta(\underline{s})=0$ gültig ist, wobei $\underline{n}$ die Oberflächennormale und $\tilde{\underline{\partial}}$ der eichinvariante Gradient ist. Im Falle reiner Supraleiter wird als Ausgangspunkt für die Berechnung der kritischen Feldstärke H_{c3} im Ginzburg-Landau-Temperaturbereich in 4. Ordnung in $\sqrt{(T_c-T)/T_c}$ - ein zuerst von Ebneth und Tewordt formuliertes Problem - das Funktional $\Phi^{(2)}$ in 4. Ordnung in $\sqrt{(T_c-T)/T_c}$ angegeben. Es besteht aus den Randwerten der Lösungen einer Differentialgleichung 2. Ordnung und ihrer eichinvarianten Ableitungen und ist a b h ä n g i g von den Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche.

1. Einleitung

Im Phasenübergang 2. Ordnung eines homogenen Supraleiters mit Zusätzen ist die (dort infinitesimale) Lücken-Funktion Lösung einer Integralgleichung

$$\Delta(\underline{r}) = gT \int_{S\mathcal{L}} d^3\underline{r}' \sum_{\omega} K_\omega(\underline{A};\underline{r},\underline{r}')\,\Delta(\underline{r}'). \qquad (1)$$

Hierbei ist g die BCS-Kopplungskonstante, T die absolute Temperatur. Die Boltzmannkonstante ist gleich eins gesetzt. Der Summationsindex ω durchläuft die positiven und negativen ungeradzahligen Vielfachen von $\omega_o = \pi T$. $\underline{A}$ ist ein Vektorpotential des magnetischen Feldes. Für den Integralkern $K_\omega(\underline{A};\underline{r},\underline{r}')$ liefert die Methode der Korrelationsfunktion nach Lüders[1] den Ausdruck

$$K_\omega(\underline{r},\underline{r}') = \frac{N_o}{4|\omega|} \int d\Omega \int d\Omega'\, e_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}'), \qquad (2)$$

wobei N_o die Zustandsdichte an der Fermikante bedeutet und[2] $e_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}')$ die Greenfunktion der Laplace-transformierten eichinvarianten Boltzmanngleichung

---

1) G. Lüders: I: Z. Naturforschung 21a, 680 (1966); II: Z. Naturforschung 21a, 1415 (1966); III: Z. Naturforschung 21a, 1425 (1966)

2) Siehe [1]. Die dort verwendete Funktion $g_\omega(\underline{r},\underline{v};\underline{r}')$ hängt mit der Greenfunktion $e_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}')$ folgendermaßen zusammen:

$$g_\omega(\underline{r},\underline{v};\underline{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{2|\omega|} \int d\Omega'\, e_\omega\left(\frac{\underline{v}}{v},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}'\right)$$

$$\left(\frac{\xi_\omega}{\zeta_\omega} + \xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\right) f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) =$$

$$= f_{t=0}(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) + \frac{\xi_\omega}{\ell\sigma}\int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') f_\omega(\hat{\underline{k}}', \underline{r}) \qquad (3)$$

für komplexwertige Verteilungen $f_t(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ im $(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$-Phasenraum ($\hat{\underline{k}}$ ist die Impulsrichtung); $f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ ist im wesentlichen die Laplace-transformierte von $f_t(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$:

$$f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) = \int_0^\infty 2|\omega| dt\, e^{-2|\omega|t} f_t(\hat{\underline{k}}, \underline{r}). \qquad (4)$$

In Gleichung (3) ist

$$\xi_\omega = \frac{\omega_o}{|\omega|}\xi_{\omega_o},$$
$$\xi_{\omega_o} = \frac{v_F}{2\omega_o} = \frac{v_F}{2\pi T}, \qquad (5)$$
$$\zeta_\omega^{-1} = \ell^{-1} + \xi_\omega^{-1}$$

mit v_F als Fermigeschwindigkeit und ℓ als freier Weglänge der Elektronen. $\tilde{\underline{\partial}}$ ist der eichinvariante Gradient

$$\tilde{\underline{\partial}} = \underline{\partial}_r + 2ie\underline{A}(\underline{r}), \qquad (6)$$

wobei $-e$ die Elektronenladung ist. Es wurden Gaußsche Einheiten gewählt mit $c = 1$ und $\hbar = 1$. $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\sphericalangle(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}'))$ ist der differentielle Streuquerschnitt für Elektronenstreuung am Potential $v(|\underline{r} - \underline{r}_o|)$ eines Störatoms am Ort $\underline{r}_o$ bei Fermienergie zur Ausfallsrichtung $\hat{\underline{k}}$ und σ der totale Streuquerschnitt desselben Streuprozesses.

Nach Gorkov[3] läßt sich aus der Integralgleichung (1) für

den nirgends begrenzten Supraleiter im Temperatur-Bereich $\sqrt{(T_c - T)/T_c} \ll \sqrt{\chi(\xi_{\omega_0}/\ell_{tr})}$ (T_c kritische Temperatur des Supraleiters) die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\left\{ \frac{T_c - T}{T_c} + \chi\left(\frac{\xi_{\omega_0}}{\ell_{tr}}\right) \frac{7\zeta(3)}{12} \xi_{\omega_0}^2 \tilde{\underline{\partial}} \cdot \tilde{\underline{\partial}} \right\} \Delta(\underline{r}) = 0 \qquad (7)$$

ableiten. ℓ_{tr} ist dabei die Transportweglänge der Elektronen, und die Funktion $\chi(\varsigma)$ ist definiert durch

$$\chi(\varsigma) = \frac{8}{7\zeta(3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 (2n+1+\varsigma)} . \qquad (8)$$

Um die Differentialgleichung (7) auch auf räumlich b e g r e n z t e Supraleiter anwenden zu können, nimmt man in der Literatur für die Lösung von (7) stets die Randbedingung

$$\underline{n} \cdot \tilde{\underline{\partial}} \, \Delta(\underline{s}) = 0 \quad (\underline{n} \text{ Oberflächennormale in } \underline{s}) \qquad (9)$$

an. Für den Sonderfall des reinen Supraleiters mit einer die Elektronen spiegelnd reflektierenden Oberfläche hat Abrikosov[4] eine Begründung für (9) gegeben. Shapoval[5] teilt mit, die Randbedingung (9) für die Ginzburg-Landau-Gleichung sei von Gorkov

---

3) L. P. Gorkov: JETP (USSR) 36, 1918 (1959), engl. Übers. Soviet Phys. - JETP 9, 1364 (1959); JETP (USSR) 37, 1407 (1959), engl. Übers. Soviet Phys. - JETP 10, 998 (1960)

4) A. A. Abrikosov: JETP (USSR) 47, 720 (1964) engl. Übers. Soviet Phys. - JETP 20, 480 (1965)

5) E. A. Shapoval: J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR) 47, 1007 (1964), engl. Übers. Soviet Phys. - JETP 20, 675 (1965). Siehe Fußnote[5]

auch allgemein abgeleitet worden; die betreffenden Überlegungen seien jedoch nicht publiziert.

Eine bekannte Anwendung der Differentialgleichung (7) in Verbindung mit der Randbedingung (9) auf Supraleiter 2. Art ist die Berechnung des Quotienten aus dem kritischen Feld H_{c3} der de Gennes-Saint-James'schen Oberflächensupraleitung und aus dem oberen kritischen Feld H_{c2} des nirgends begrenzten Supraleiters desselben Materials. Die Randbedingung (9) spielt bei dieser Berechnung eine entscheidende Rolle.

Von verschiedenen Autoren wurden aus (1) verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichungen für n i r g e n d s b e g r e n z t e Supraleiter abgeleitet, welchen seit einer Arbeit von Tewordt[6] und einer Arbeit von Ebneth und Tewordt[7] besonderes Interesse zukommt. Als Beispiel sei die verallgemeinerte und linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung 4. Ordnung für reine Supraleiter hingeschrieben:

$$\left\{\frac{T_c-T}{T_c}+\frac{31}{20}\zeta(5)\,\xi_{\omega_0}^4\cdot 4(eH)^2+\frac{7}{12}\zeta(3)\,\xi_{\omega_0}^2\,\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\right.$$
$$\left.+\frac{31}{80}\zeta(5)\,\xi_{\omega_0}^4\left(\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\right)^2\right\}\Delta(r)=0. \qquad (10)$$

Während mit der Differentialgleichung (7) die kritischen Feldstärken H_{c2} und H_{c3} im Temperatur-Bereich $\sqrt{\frac{T_c-T}{T_c}} \ll 1 \sqrt{\chi\left(\frac{\xi_{\omega_0}}{\ell_{tr}}\right)}$

6) L. Tewordt: Z. Physik 184, 319 (1965)

7) G. Ebneth und L. Tewordt: Z. Physik 185, 421 (1965)

nur in 2. Ordnung in $\sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$ zu berechnen sind, läßt sich H_{c2} aus der verallgemeinerten Ginzburg-Landau-Gleichung (10) im Temperatur-Bereich $\sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}} \ll 1$ in vierter Ordnung in $\sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$ berechnen, wie Tewordt [6] gezeigt hat. Um auch H_{c3} aus der Differentialgleichung (10) (in 4. Ordnung in $\sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$) zu gewinnen - ein Projekt von Ebneth und Tewordt [7] -, benötigt man die Randbedingungen zu dieser Differentialgleichung. Darüber scheint aber nichts bekannt zu sein.

Die vorliegende Untersuchung will die Gültigkeit der Randbedingung (9) für die Differentialgleichung (7) prüfen und herausfinden, in welcher Weise die verallgemeinerten linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichungen für reine Supraleiter, wie Gleichung (10), auf begrenzte Supraleiter anzuwenden sind. Dabei soll auch "diffuse Elektronenreflexion" an der Supraleiteroberfläche in Betracht gezogen werden, ein Begriff aus der Theorie der elektrischen Leitfähigkeit[8]. Für gewisse Erscheinungen im Zusammenhang mit der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle, etwa für den anomalen Skineffekt, ist die Art und Weise von Bedeutung, in welcher die Leitungselektronen an der Metalloberfläche reflektiert werden. Man wird auch bei den Randbedingungen für die Lückenfunktion einen Einfluß der Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche erwarten können. Neuerdings[1] erlaubt die Methode der Korrelationsfunktion, die Art der Elektronenreflexion an der Metall-Oberfläche auch in der Theorie der Supraleitung zu berücksichtigen.

---

8) E. Sondheimer: Adv. in Physics 1, 1 (1952)

Eine besondere Verfahrensweise für die Untersuchung räumlich b e g r e n z t e r Supraleiter erfordert der folgende Umstand. Die Differentialgleichungen (7) und (10) sind zwar im Innern eines begrenzten Supraleiters, in hinreichendem Abstand von seiner Oberfläche, genauso gültig wie in einem nirgends begrenzten Supraleiter; über ihre Gültigkeit in der Nähe der Supraleiter-Oberfläche ist von vornherein jedoch nichts bekannt. Die Reichweite ξ_K des Integralkerns $\sum_\omega K_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ in Gl. (1) für den nirgends begrenzten Supraleiter ist ungefähr die Entfernung, die ein Punkt $\mathbf{r}$ von der Supraleiter-Oberfläche mindestens haben muß, damit in $\mathbf{r}$ noch die Gleichung (7) bzw. (10) gültig ist (im betreffenden Temperatur-Bereich). ξ_K ist stets kleiner als ξ_{ω_o}. Wir nehmen im folgenden die charakteristischen Ausmaße des Supraleiters als groß gegen ξ_K an.

Andererseits ist in dem Temperaturbereich und in dem Bereich des Supraleiters, in denen die Differentialgleichung (7) bzw. (10) gültig ist, die Länge L, welche die relative örtliche Änderung von $|\Delta(\mathbf{r})|$ und der Absolutbeträge $|(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n\Delta(\mathbf{r})|$ der eichinvarianten Ableitungen von $\Delta(\mathbf{r})$ charakterisiert, groß gegen ξ_{ω_o} und a fortiori groß gegen ξ_K. Um nämlich von der Integralgleichung (1) zu einer Differntialgleichung (7) oder (10) zu gelangen, hat man das Integral $\int d^3r' K_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\Delta(\mathbf{r}')$ rechts in Gleichung (1) nach Potenzen des Operators $\xi_\omega\tilde{\underline{\partial}}$ zu entwikkeln, dieser angewandt auf $\Delta(\mathbf{r})$. - Über die relative örtliche Veränderlichkeit von $|\Delta(\mathbf{r})|$ und $|(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n\Delta(\mathbf{r})|$ in der Randschicht der ungefähren Dicke ξ_K ist von vornherein nichts bekannt.

Da außerhalb dieser Randschicht die charakteristische Länge L des Funktionsverlaufs von $\Delta(\underline{r})$ groß ist gegen ihre Dicke ξ_K, liegt es nahe, den Funktionsverlauf von $\Delta(\underline{r})$ aus dem Innern des Supraleiters heraus in die Randschicht der Dicke ξ_K hinein zu extrapolieren. Das geschieht am einfachsten dadurch, daß man die Lückenfunktion $\Delta(\underline{r})$ ersetzt durch diejenige Lösung von (7) bzw. (10), welche im Innern des Supraleiters mit $\Delta(\underline{r})$ übereinstimmt. Das geeignete Verfahren für diese Anpassung scheint uns eine Approximation nach dem thermodynamischen Variationsprinzip zu sein.

Nach Eilenberger[9] sind die Lückenfunktion und ein beliebiges Vektorpotential des Magnetfeldes eines Supraleiters dadurch charakterisiert, daß sie das Funktional

$$\Phi(\Delta,\underline{A}) = -T\left\{\ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{1}{T}K(\Delta,\underline{A})} - \ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{1}{T}K(\Delta,\underline{A}_a)}\right\} + \frac{1}{g}\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,|\Delta(\underline{r})|^2 + \frac{1}{8\pi}\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,(\underline{H}-\underline{H}_a)^2 \tag{11}$$

von $\Delta(\underline{r})$ und $\underline{A}(\underline{r})$ minimalisieren. $\underline{H}_a$ ist dabei das äußere Magnetfeld, $\underline{A}_a$ ein zugehöriges Vektorpotential. Der Operator $K(\Delta,\underline{A})$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} K(\Delta,\underline{A}) + \mu N = {} & \\ = {} & \frac{1}{2m}\int_{S\mathcal{L}} d^3r \sum_\sigma (\underline{\partial} - ie\underline{A}(\underline{r}))\psi_\sigma^+(\underline{r})\cdot(\underline{\partial} + ie\underline{A}(\underline{r}))\psi_\sigma(\underline{r}) \\ & + \sum_{j,\sigma}\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,\psi_\sigma^+(\underline{r})\,v(|\underline{r}-\underline{r}_j|)\psi_\sigma(\underline{r}) \\ & - \int_{S\mathcal{L}} d^3r\left\{\Delta(\underline{r})\,\psi_\uparrow^+(\underline{r})\,\psi_\downarrow^+(\underline{r}) + \text{h.a.}\right\}, \end{aligned} \tag{12}$$

9) G. Eilenberger: Z. Physik 182, 427 (1965)

wobei μ das chemische Potential, N der Teilchenzahloperator, $\psi_\sigma^+(\mathbf{r})$ und $\psi_\sigma(\mathbf{r})$ der Elektronen-Erzeugungs- und -Vernichtungsoperator zum Ort $\mathbf{r}$ und zur Spin-z-Komponente σ ($=\uparrow$ oder $=\downarrow$) sind und $\mathbf{r}_j$ die Örter der Störatome. - Statt $\Phi(\Delta,\underline{A})$ frei nach Δ und $\underline{A}$ zu variieren, werden wir die Konkurrenzfunktionen $\Delta(\mathbf{r})$ auf die Klasse $\mathfrak{K}(T,H_a)$ der Lösungen von (7) bzw. von (10) (bei beliebiger, aber fester Eichung des Vektorpotentials) beschränken, und zwar auf die Klasse derjenigen Lösungen, deren charakteristische Länge L groß ist gegen ξ_{ω_o}. In einem beschränkten Supraleiter ist die Lückenfunktion beschränkt, da stetig. In einem nicht beschränkten Supraleiter werden wir die Beschränktheit der Lückenfunktion fordern. Demgemäß schränken wir die Klasse $\mathfrak{K}(T,H_a)$ der Konkurrenzfunktionen $\Delta(\mathbf{r})$ noch weiter ein dadurch, daß wir nur beschränkte Funktionen $\Delta(\mathbf{r})$ zur Konkurrenz zulassen. Zunächst jedoch wählen wir als Klasse $\mathfrak{K}(T,H_a)$ der Konkurrenzfunktionen die größere Klasse aller im Supraleiter definierten beschränkten Funktionen $\Delta(\mathbf{r})$, bei denen die relative örtliche Änderung von $|\Delta(\mathbf{r})|$ und von $|(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n\Delta(\mathbf{r})|$ durch eine Länge $L \gg \xi_{\omega_o}$ charakterisiert werden kann, und erhalten in den Abschnitten 4 und 5 jeweils einen für die Funktionen aus $\mathfrak{K}(T,H_a)$ gültigen Ausdruck für das Funktional

$$\Phi^{(2)}(\Delta,\underline{A}) = \frac{1}{g}\int_{S\mathfrak{K}} d^3r\,|\Delta(\mathbf{r})|^2 - \tag{13}$$

$$- T\sum_\omega \int_{S\mathfrak{K}} d^3r \int_{S\mathfrak{K}} d^3r'\,\Delta(\mathbf{r})^* K_\omega(\underline{A};\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\Delta(\mathbf{r}'),$$

aufgebaut aus eichinvarianten Ableitungen von $\Delta(\mathbf{r})$ und aus ihren Randwerten. In Abschnitt 2 wird gezeigt, wie der Phasenübergang zweiter Ordnung statt mit $\Phi(\Delta,\underline{A})$ (Gl. (11)) mittels

$\phi^{(2)}(\Delta, \underline{A})$ charakterisiert werden kann.

In Abschnitt 4 schränken wir die Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ auf Lösungen von (7) ein und beweisen, daß die Randbedingung (9) für die Differentialgleichung (7) gültig ist, unabhängig von den mikroskopischen Reflexionsverhältnissen an der Supraleiter-Oberfläche. Eine wichtige Folgerung ist die, daß der Quotient der kritischen Feldstärken H_{c3} und H_{c2} im Temperatur-Bereich $\sqrt{(T_c - T)/T_c} \ll \sqrt{\chi(\xi_{\omega_o}/\ell_{tr})}$ bis zur 2. Ordnung in $\sqrt{(T_c - T)/T_c}$ unabhängig ist von den Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche.

In Abschnitt 5 schränken wir die Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ auf Lösungen von (10) ein; die Differentialgleichung (10) reduziert sich, da nur Lösungen mit einer charakteristischen Länge $L \gg \xi_{\omega_o}$ in Frage kommen, auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung der Form:

$$(\lambda + \tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) \Delta(r) = 0 . \qquad (14)$$

Für $\phi^{(2)}$ erhalten wir einen Ausdruck, der aufgebaut ist aus Randwerten von eichinvarianten Ableitungen der Lösungen von (14). Dieser Ausdruck hängt von den Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche ab. Er ist als Ausgangspunkt für die Durchführung des oben erwähnten Projekts von Ebneth und Tewordt[7] zu betrachten. Es ist in diesem Falle nicht möglich, die Randbedingung für (14) zu ermitteln, ohne zugleich das betreffende kritische Feld selbst zu bestimmen.

2 . Bestimmung des Phasenübergangs 2. Ordnung mittels des Funktionals $\Phi^{(2)}$

Um zunächst das Funktional $\Phi(\Delta,\underline{A})$ aus Gleichung (11) in eine handliche Form zu bringen, übernehmen wir ein Verfahren von Silvert und Cooper[10] und bilden:

$$\frac{d}{d\lambda}\Phi(\lambda\Delta,\underline{A}) = \frac{2\lambda}{g}\int d^3r\,|\Delta(r)|^2 - \tag{15}$$

$$-\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,\left(\Delta(r)\,Sp\{\varrho(\lambda\Delta,\underline{A})\,\psi_\uparrow^+(r)\,\psi_\downarrow^+(r)\} + c.c.\right).$$

In (15) ist

$$\varrho(\lambda\Delta,\underline{A}) = e^{-\frac{1}{T}K(\lambda\Delta,\underline{A})}\Big/ Sp\,e^{-\frac{1}{T}K(\lambda\Delta,\underline{A})} \tag{16}$$

Aus (15) ergibt sich durch Integration:

$$\Phi(\Delta,\underline{A}) = \Phi(0,\underline{A}) + \frac{1}{g}\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,|\Delta(r)|^2 - \tag{17}$$

$$-\left(\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,\Delta(r)\int_0^1 d\lambda\; Sp\{\varrho(\lambda\Delta,\underline{A})\,\psi_\uparrow^+(r)\,\psi_\downarrow^+(r)\} + c.c.\right).$$

Zur weiteren Auswertung dieses Ausdrucks bedienen wir uns der Greenfunktionen

$$i\,F_t(\Delta,\underline{A};\,r,r') = Sp\{\varrho(\Delta,\underline{A})\,T\psi_\uparrow^+(r,t)\,\psi_\downarrow^+(r',0)\},$$

$$i\,G_t(\Delta,\underline{A};\,r,r') = Sp\{\varrho(\Delta,\underline{A})\,T\,\psi_\downarrow(r,t)\,\psi_\downarrow^+(r',0)\} \tag{18}$$

10) W. Silvert u. L.N. Cooper: Phys. Rev. 141, 336 (1966)

$$= Sp\{\varrho(\Delta,\underline{A})\, T\psi_\uparrow(r,t)\,\psi_\uparrow^+(r',o)\}\ . \quad (18)$$

Mit den Fourierkoeffizienten $F_\omega = (1/2)\int_{-i/T}^{i/T} dt\, e^{-\omega t} F_t$ können wir schreiben:

$$Sp\{\varrho(\lambda\Delta,\underline{A})\,\psi_\uparrow^+(r)\,\psi_\downarrow^+(r)\} = \quad (19)$$

$$= -T\sum_\omega F_\omega(\lambda\Delta,\underline{A};r,r)\ .$$

In diesem Ausdruck entwickeln wir noch F_ω nach Potenzen von $\lambda\Delta$ und setzen (19) in (17) ein. Das Resultat ist

$$\Phi(\Delta,\underline{A}) = \Phi(o,\underline{A}) + \Phi^{(2)}(\Delta,\underline{A}) + \Phi^{(4)}(\Delta,\underline{A}) + \cdots,$$

wobei gilt (20)

$$\Phi^{(2k)}(\alpha\Delta,\underline{A}) = |\alpha|^{2k}\,\Phi^{(2k)}(\Delta,\underline{A})\ .$$

Für $\Phi^{(2)}(\Delta,\underline{A})$ wollen wir den expliziten Ausdruck angeben. Es ist

$$\Phi^{(2)}(\Delta,\underline{A}) = \frac{1}{g}\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,|\Delta(r)|^2 - \quad (21)$$

$$-T\sum_\omega \int_{S\mathcal{L}} d^3r \int_{S\mathcal{L}} d^3r'\,\Delta(r)^*\,K_\omega(\underline{A};r,r')\,\Delta(r')$$

mit

$$K_\omega(\underline{A};r,r') = G_\omega(o,\underline{A};r',r)^*\,G_\omega(o,\underline{A};r,r') \quad (22)$$

$$= G_{-\omega}(o,\underline{A};r,r')\,G_\omega(o,\underline{A};r,r')\ .$$

$K_\omega(\underline{A};\underline{r},\underline{r}')$ in Gl. (22) kann bis auf die noch fehlende Mittelung über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Störatome als identisch mit dem ebenso bezeichneten Integralkern in Gl. (1) angesehen werden[11]. Gl. (22) ist die ursprüngliche Definition von K_ω.

Wir zeigen jetzt, daß für $\Phi(o,\underline{A})$ in Gl. (20) gilt:

$$\Phi(o,\underline{A}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,(\underline{H}-\underline{H}_a)^2. \tag{23}$$

Dazu ist nach Definition (11)

$$-T\left\{\ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{1}{T}K(o,\underline{A})} - \ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{1}{T}K(o,\underline{A}_a)}\right\}=0 \tag{24}$$

zu beweisen. Wir bilden ähnlich wie oben

$$\frac{d}{d\lambda}(-T)\left\{\ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{1}{T}K(o,\underline{A}_a+\lambda(\underline{A}-\underline{A}_a)} - \ln \mathrm{Sp}\, e^{-\frac{1}{T}K(o,\underline{A}_a)}\right\} = \tag{25}$$

$$= -\int d^3r\,(\underline{A}-\underline{A}_a)\cdot \underline{j}(\underline{A}_a+\lambda(\underline{A}-\underline{A}_a);\,\underline{r})$$

und beweisen

$$\underline{j}(\underline{A}_a+\lambda(\underline{A}-\underline{A}_a);\,\underline{r}) \equiv o\,, \tag{26}$$

und zwar in quasiklassischer Näherung; es ist jedoch zu vermuten, daß (26) allgemeiner gilt. Für $\underline{A}_a+\lambda(\underline{A}-\underline{A}_a)$ schreiben wir kurz $\underline{\tilde{A}}$. Es ist

---

11) siehe [1]

$$j(\tilde{\underline{A}};r) =$$

$$= -\frac{e}{m} \lim_{\substack{t\to -0 \\ r'\to r}} \{(-i\partial_r + e\tilde{\underline{A}}(r)) + \tag{27}$$

$$+ (i\partial_{r'} + e\tilde{\underline{A}}(r'))\} iG_t(o,\tilde{\underline{A}};r,r').$$

Unter Benutzung der quasiklassischen Näherung

$$G_t(o,\tilde{\underline{A}};r,r') = G_t(o,\underline{o};r,r')\, e^{-ie\cdot\frac{1}{2}(\tilde{\underline{A}}(r)+\tilde{\underline{A}}(r'))\cdot(r-r')} \tag{28}$$

erhalten wir aus (27)

$$j(\tilde{\underline{A}};\underline{r}) \equiv j(\underline{o};r). \tag{29}$$

Schließlich folgt

$$j(\underline{o};r) \equiv 0 \tag{30}$$

aus (27) zusammen mit

$$G_t(o,\underline{o};r,r') = G_t(o,\underline{o};r',r). \tag{31}$$

Mit Gln.(20) und (23) haben wir nun

$$\Phi(\Delta,\underline{A}) = \int d^3r\,(\underline{H}-\underline{H}_a)^2 + \Phi^{(2)}(\Delta,\underline{A}) + \Phi^{(4)}(\Delta,\underline{A})$$

$+\ldots$, wobei gilt (32)

$$\Phi^{(2k)}(\alpha\Delta,\underline{A}) = |\alpha|^{2k}\,\Phi^{(2k)}(\Delta,\underline{A}).$$

Über die Klasse $\mathfrak{A}(T,H_a)$ der Konkurrenzfunktionen $\Delta(r)$ wird im vorliegenden Abschnitt nichts weiter vorausgesetzt, als daß

diese beschränkt sind. Als äußere Magnetfelder $\underline{H}_a$ ziehen wir nur konstante Magnetfelder $\underline{H}_a(\underline{r}) = H_a \cdot \hat{\underline{h}}$ einer vorgegebenen Richtung $\hat{\underline{h}}$ in Betracht. Die einstellbaren Parameter sind die Temperatur T und die äußere Feldstärke H_a. Für einen Punkt der (T, H_a)-Phasenebene seien $\Delta(T, H_a)$ die optimale Lückenfunktion und $\underline{A}(T, H_a)$ ein Vektorpotential des optimalen Feldes $\underline{H}$, d.h. $\Phi(\Delta, \underline{A})$ werde in $\mathfrak{K}(T, H_a)$ durch $\Delta(T, H_a)$ und $\underline{A}(T, H_a)$ minimalisiert. Als supraleitenden Bereich der (T, H_a)-Phasenebene wird man denjenigen bezeichnen, in dem $\Delta(T, H_a; \underline{r})$ nicht identisch verschwindet, als normalleitenden Bereich den dazu komplementären. Im allgemeinen wird der Verlauf der Grenze zwischen ihnen, der Phasengrenze $H_a = H_c(T)$, von der Wahl der Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ der Konkurrenzfunktionen abhängig sein. Die in der Einleitung erläuterten Verhältnisse, welche zu dem hier verwendeten Approximationsverfahren führten, lassen vermuten, daß die Näherung, welche wir mit unserer besonderen Wahl der Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ in Abschnitt 4 bzw. 5 machen werden, gut ist.

Wir machen nun die übliche Annahme[12] für den als von zweiter Ordnung vorausgesetzten Phasenübergang, daß bei Annäherung von (T, H_a) an die Phasengrenze vom supraleitenden Bereich her $\Delta(T, H_a; \underline{r})$ beliebig klein wird. Diese Annahme liegt auch schon der Gleichung (1) zugrunde, wenn dabei $\mathfrak{K}(T, H_a)$ als Klasse aller im Supraleiter definierten beschränkten Funktionen gewählt wird.

12) Vgl. z.B. L.P. Gorkov: JETP (USSR) 37, 833 (1959), engl. Übers. Sov. Phys. JETP 10, 593 (1960);
P.G. de Gennes: Physik d. kondens. Mat. 3, 79 (1964);
W. Silvert u. L.N. Cooper: Phys. Rev. 141, 336 (1966)

Angewandt auf (32), führt diese Annahme zu den folgenden beiden Aussagen. Erstens ist

$$\operatorname{rot} \underline{A}(T, H_c(T)) = H_c(T) \cdot \hat{h}, \tag{33}$$

d.h. im Phasenübergang stimmen Feld und äußeres Feld überein. Zweitens ist

$$\delta_\Delta \Phi^{(2)}\left(\Delta(T, H_c(T)); \underline{A}(T, H_c(T))\right) = 0 \quad \text{in } \mathcal{A}(T, H_c(T)); \tag{34}$$

denn es ist allgemein $\delta_\Delta \Phi(\Delta(T, H_a); \underline{A}(T, H_a)) = 0$ in $\mathcal{A}(T, H_a)$. Durch die Aussagen (33) und (34) ist der Phasenübergang vollständig charakterisiert. $\Phi^{(2)}$ ist dabei durch Gl. (21) gegeben mit K_ω nach Gl. (2).

3. Zur Handhabung der eichinvarianten Boltzmanngleichung

Der Berechnung von $\phi^{(2)}(\Delta, \underline{A})$ in den Abschnitten 4 und 5 schicken wir in diesem Abschnitt einige Bemerkungen zur Handhabung der eichinvarianten Boltzmanngleichung (3) voraus.

Ihre Lösungen $f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ müssen die folgenden Randbedingungen[13] erfüllen:

$$f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{s}) = \int d\Omega' w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') f_\omega(\hat{\underline{k}}', \underline{s}) \qquad (35)$$

($\underline{s}$ auf der Oberfläche des Supraleiters). Ist der Supraleiter in gewissen Richtungen $\underline{r}/|\underline{r}|$ nicht begrenzt, so sollen $f_{t=0}(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ und $f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ für $|\underline{r}| \to \infty$ beschränkt bleiben:

$$\left.\begin{aligned} |f_{t=0}(\hat{\underline{k}}, \underline{r})| &\leq M \\ |f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})| &\leq M \end{aligned}\right\} \quad \underline{r} \text{ im } S\mathcal{L}, |\underline{r}| \to \infty . \qquad (36)$$

Der Reflexionskern $w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}')$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') \geq 0 ,$$

$$w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') = 0, \text{ wenn } \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}} < 0 \text{ oder } \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}' > 0 \qquad (37)$$

($\underline{n}$ in den Supraleiter weisende Oberflächen-Normale),

$$\int d\Omega\, \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') = -\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}', \qquad (38)$$

$$-\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') = \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}'\, w(-\hat{\underline{k}}', -\hat{\underline{k}}) . \qquad (39)$$

---

13) siehe [1]

Eine Folgerung aus (38) ist das Verschwinden der oberflächennormalen "Teilchenstromdichte-Komponente":

$$\int d\Omega\, \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{s}) = 0. \tag{40}$$

Wir können noch die Drehinvarianz bei Drehung $\hat{\underline{k}} \to \hat{\underline{k}}^\delta$ um die Oberflächennormale und die Spiegelungsinvarianz bei Spiegelung $\hat{\underline{k}} \to \hat{\underline{k}}^\tau$ an Flächen durch die Oberflächen-Normale hinzunehmen:

$$\begin{aligned} w(\hat{\underline{k}}^\delta, \hat{\underline{k}}'^\delta) &= w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}'), \\ w(\hat{\underline{k}}^\tau, \hat{\underline{k}}'^\tau) &= w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}'). \end{aligned} \tag{41}$$

Bezeichnen wir durch $\hat{\underline{k}} \to \hat{\underline{k}}^\sigma$ die Spiegelung der Richtung $\hat{\underline{k}}$ an der Supraleiter-Oberfläche (im betreffenden Oberflächen-Punkt $\underline{s}$), so wird die spiegelnde Elektronenreflexion an der Supraleiter-Oberfläche beschrieben durch

$$w_{sp}(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') = \begin{cases} \delta^2(\hat{\underline{k}}^\sigma, \hat{\underline{k}}') & \text{, wenn } \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}} > 0 \\ & \text{und } \underline{n}\hat{\underline{k}}' < 0, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{42}$$

$\delta^2(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}')$ bezeichnet die zum Flächenelement $d\Omega$ auf der Einheitskugel gehörige δ-Funktion. Die diffuse Elektronenreflexion beschreiben wir durch den einzigen separablen Reflexionskern $w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') = u(\hat{\underline{k}}) \cdot v(\hat{\underline{k}}')$, der die Bedingungen (46) - (48) erfüllt; das ist der Kern

$$w_{diff}(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}') = \begin{cases} \frac{1}{\pi}|\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}'| \text{ , wenn } \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}>0 \\ \qquad\qquad \text{und } \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}'<0, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{43}$$

Mit

$$w_p(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}') = p\, w_{diff}(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}') + (1-p)\, w_{sp}(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}') \qquad (0\leq p\leq 1) \tag{44}$$

hat man eine für praktische Belange wohl ausreichende Schar von Reflexionskernen (vgl. [8]).

Die Greenfunktion $e_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}')$ ist (bei festem $\hat{\underline{k}}',\underline{r}'$) eine Verteilung im Phasenraum, also eine Lösung von (3) mit den Randbedingungen (35) und (36), charakterisiert durch die Anfangsbedingung:

$$e_{t=0}(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}') = \delta^2(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\,\delta^3(\underline{r}-\underline{r}'). \tag{45}$$

Ist $f(\hat{\underline{k}},\underline{r})$ eine Funktion im Phasenraum, die den Randbedingungen (35) und (36) genügt, so ist

$$f_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) = \int d\Omega' \int_{S\mathcal{E}} d^3r'\, e_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}')\, f(\hat{\underline{k}}',\underline{r}') \tag{46}$$

eine Verteilung im Phasenraum mit der Anfangsbedingung

$$f_{t=0}(\hat{\underline{k}},\underline{r}) = f(\hat{\underline{k}},\underline{r}). \tag{47}$$

Das Integral $\int d^3r \int d^3r' \Delta(\underline{r})^* K_\omega(\underline{r},\underline{r}')\Delta(\underline{r}')$ in Gl. (21) läßt sich daher (s. (2)) in der Form schreiben $(N_o/2)\int d\Omega \int_{S\mathcal{E}} d^3r \cdot \Delta(\underline{r})^* \Delta_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r})$, wobei $\Delta_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r})$

die Boltzmann-Verteilung mit der Anfangsbedingung

$$\Delta_{t=0}(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) = \Delta(\underline{r}) \tag{48}$$

ist; $\Delta_{t=0}(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) = \Delta(\underline{r})$ erfüllt die Randbedingungen (35) und (36) wegen (38) und (39), und weil nur beschränkte Funktionen $\Delta(\underline{r})$ als Konkurrenzfunktionen in Frage kommen. Führen wir die Bezeichnung

$$\begin{aligned} \Phi_\omega &= \int d\Omega \int_{S\mathcal{L}} d^3r\, \Delta(\underline{r})^* \Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) \\ &= \frac{4|\omega|}{N_0} \int_{S\mathcal{L}} d^3r \int_{S\mathcal{L}} d^3r'\, \Delta(\underline{r})^* K_\omega(\underline{r}, \underline{r}') \Delta(\underline{r}') \end{aligned} \tag{49}$$

ein, so ist

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{S\mathcal{L}} d^3r\, |\Delta(\underline{r})|^2 - \sum_\omega \frac{T N_0}{4|\omega|} \Phi_\omega \,, \tag{50}$$

und $\Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ in Φ_ω ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_\omega}{\zeta_\omega} + \xi_\omega \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}}\right) \Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) &= \Delta(\underline{r}) + \\ &+ \frac{\xi_\omega}{\ell \sigma} \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}')\, \Delta_\omega(\hat{\underline{k}}', \underline{r}) \,; \end{aligned} \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int d\Omega'\, w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}')\, \Delta_\omega(\hat{\underline{k}}', \underline{s}) = \Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{s}), \\ &|\Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})| \leq M \quad \text{für } |\underline{r}| \to \infty \\ &(\underline{s} \text{ auf der Supraleiter-Oberfläche}). \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

4. Ableitung der Randbedingung für die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung

Es soll nun zunächst $\Phi^{(2)}$ (Gl.(21)) näherungsweise berechnet werden. Dem in der Einleitung aufgestellten Plan gemäß haben wir den Grenzübergang

$$\xi_\omega / L \to 0 \quad (\text{für alle } \omega) \tag{53}$$

zu betrachten mit L als charakteristischer Länge der Konkurrenzfunktion $\Delta(\mathbf{r})$. Wir wollen - vgl. Gl. (50) - Φ_ω in 2. Ordnung in ξ_ω/L nähern. Dazu werden wir die Verteilung

$$\Delta^0_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) = \{1 - \zeta^{(1)}_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}} + \zeta^{(1)}_\omega \zeta^{(2)}_\omega (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^2 + \\ + \tfrac{1}{3}\zeta^{(1)}_\omega (\xi_\omega - \zeta^{(2)}_\omega)\,\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\}\,\Delta(\mathbf{r}) \tag{54}$$

im $(\hat{\underline{k}},\mathbf{r})$-Phasenraum benutzen, welche in der Näherung 2. Ordnung in ξ_ω/L eine Lösung der Boltzmanngleichung (51) ist:

$$\left(\frac{\xi_\omega}{\zeta_\omega} + \xi_\omega\,\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\right)\Delta^0_\omega(\hat{\underline{k}},\mathbf{r}) - \\ - \frac{\xi_\omega}{\ell\sigma}\int d\Omega'\,\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\,\Delta^0_\omega(\hat{\underline{k}}',\mathbf{r}) - \Delta(\mathbf{r}) = \tag{55}$$
$$= \xi_\omega\,\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\left(\zeta^{(1)}_\omega\zeta^{(2)}_\omega(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^2 + \tfrac{1}{3}\zeta^{(1)}_\omega(\xi_\omega - \zeta^{(2)}_\omega)\,\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\right)\Delta(\mathbf{r}),$$

i.a. aber die Randbedingung (52) nicht erfüllt.

Hierbei sind $\zeta^{(1)}_\omega$ und $\zeta^{(2)}_\omega$ definiert durch:

$$\xi_\omega^{-1} + \left(1 - \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma}\right)\ell^{-1} = \zeta^{(1)\,-1}_\omega\,, \\ \xi_\omega^{-1} + \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\sigma^{(2)}}{\sigma}\right)\ell^{-1} = \zeta^{(2)\,-1}_\omega \tag{56}$$

mit

$$\sigma^{(k)} = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) \cos^k \vartheta \, . \tag{57}$$

Es ist

$$\zeta_\omega^{(i)} \leq \xi_\omega \quad (\zeta_\omega^{\circ} = \zeta_\omega) \, , \tag{58}$$

und ξ_ω / L und $\zeta_\omega^{(i)} / L$ sind als Größen gleicher Ordnung zu behandeln; denn die Größen $\sigma^{(k)}$ und ℓ in Gl. (56) werden beim Grenzübergang $\xi_\omega / L \to 0$ nicht geändert.

Sei nun $\Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ die Lösung der eichinvarianten Boltzmanngleichung (51), welche der Randbedingung (52) genügt. Wenn wir definieren:

$$\Delta_\omega^1(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) = \Delta_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) - \Delta_\omega^\circ(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) \, , \tag{59}$$

so können wir für Φ_ω schreiben:

$$\Phi_\omega = 4\pi \int_{S\mathcal{L}} d^3 r \, \Delta(\underline{r})^* \left(1 + \frac{\xi_\omega \zeta_\omega^{(1)}}{3} \tilde{\underline{\partial}} \cdot \tilde{\underline{\partial}}\right) \Delta(\underline{r}) + \Psi_\omega \tag{60}$$

mit

$$\Psi_\omega = \int_{S\mathcal{L}} d^3 r \, \Delta(\underline{r})^* \int d\Omega \, \Delta_\omega^1(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) \, . \tag{61}$$

Der Ausdruck Ψ_ω kann unter Benutzung der in 2. Ordnung in ξ_ω / L gültigen Relation

$$\left(\frac{\xi_\omega}{\zeta_\omega} + \xi_\omega \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}}\right) \Delta_\omega^1(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) - \frac{\xi_\omega}{\ell \sigma} \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') \, \Delta_\omega^1(\hat{\underline{k}}', \underline{r}) = 0 \tag{62}$$

umgeformt werden.

Durch Einsetzen der aus (62) folgenden Gl.

$$\int d\Omega\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) = -\xi_\omega \int d\Omega\, \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) \tag{63}$$

in Gl. (61) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Psi_\omega &= -\xi_\omega \int d\Omega \int_{S\mathfrak{L}} d^3r\, \Delta(\underline{r})^*\, \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) \\ &= \xi_\omega \int d\Omega \int_{\sigma S\mathfrak{L}} d^2s\, \Delta(\underline{s})^*\, \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{s}) \\ &\quad + \xi_\omega \int d\Omega \int_{S\mathfrak{L}} d^3r \left(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta(\underline{r})\right)^* \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}),\end{aligned} \tag{64}$$

die zweite Gleichheit durch Anwendung der Regel der "eichinvarianten partiellen Integration"

$$\begin{aligned}\int_{S\mathfrak{L}} d^3r\, \Phi(\underline{r})^*\, \underline{k}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Psi(\underline{r}) &= -\int_{\sigma S\mathfrak{L}} d^2s\, \Phi(\underline{s})^*\, \underline{n}\cdot\underline{k}\, \Psi(\underline{s}) - \\ &\quad - \int_{S\mathfrak{L}} d^3r\, (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Phi(\underline{r}))^*\, \Psi(\underline{r})\ .\end{aligned} \tag{65}$$

Das letzte Integral in Gl. (64) formen wir durch Einsetzen der aus (62) folgenden Gl.

$$\begin{aligned}\Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) &= -\zeta_\omega\, \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) + \\ &\quad + \frac{\zeta_\omega}{\ell\sigma} \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}}',\underline{r})\end{aligned} \tag{66}$$

um:

$$\begin{aligned}&\int d\Omega \int_{S\mathfrak{L}} d^3r\, (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta(\underline{r}))^*\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) = \\ &\quad = -\zeta_\omega \int d\Omega \int_{S\mathfrak{L}} d^3r\, (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta(\underline{r}))^*\, \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{r}) +\end{aligned} \tag{67}$$

$$+\frac{\zeta_\omega}{l\sigma}\int d\Omega \int_{S\mathcal{L}} d^3r\,(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\Delta(r))^* \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\cdot \cdot \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}}',r)\ . \tag{67}$$

Wir setzen die Identität

$$\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(\sphericalangle(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}'))\,\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}} = \sigma^{(1)}\hat{\underline{k}}'\cdot\tilde{\underline{\partial}} \tag{68}$$

in das zweite Integral auf der rechten Seite von Gl. (67) ein und erhalten

$$\int d\Omega \int_{S\mathcal{L}} d^3r\,(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\Delta(r))^*\Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},r) = \tag{69}$$
$$= -\zeta^{(1)}_\omega \int d\Omega \int_{S\mathcal{L}} d^3r\,(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\Delta(r))^*\,\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},r).$$

Das Integral rechts in Gl. (69) ist mit der Regel (65) partiell zu integrieren, und Gl. (69) ist in Gl. (64) einzusetzen. Das Resultat ist

$$\Psi_\omega = \xi_\omega \int d\Omega \int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s\,[(1+\zeta^{(1)}_\omega\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\,\Delta(\underline{s})]^*\,\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\cdot \cdot \Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},\underline{s}) \tag{70}$$
$$+\xi_\omega\zeta^{(1)}_\omega \int d\Omega \int_{S\mathcal{L}} d^3r\,[(\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^2\Delta(r)]^*\Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},r).$$

Das zweite Integral in (70) ist eine Größe höherer als zweiter Ordnung in ξ_ω/L; denn $\Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},r)$ ist eine Größe höherer als nullter Ordnung in ξ_ω/L. Es wird nämlich mit $\xi_\omega/L \to 0$ die Verteilung Δ°_ω gemäß (54) isotrop und erfüllt dann selbst die Randbedingung (52). Daraus können wir schließen, daß

$$\Delta^1_\omega(\hat{\underline{k}},r) = \Delta_\omega(\hat{\underline{k}},r) - \Delta^\circ_\omega(\hat{\underline{k}},r) \longrightarrow 0, \tag{71}$$
$$\text{wenn}\quad \xi_\omega/L \longrightarrow 0\ .$$

Mithin gilt bis zur 2. Ordnung in ξ_ω/L statt (70) einfach:

$$\Psi_\omega = \xi_\omega \int d\Omega \int_{\sigma S \mathcal{Z}} d^2s \left[(1+\zeta_\omega^{(1)} \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\Delta(\underline{s})\right]\cdot \qquad (72)$$
$$\cdot \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, \Delta_\omega^1(\hat{\underline{k}},\underline{s}) \ .$$

Das Funktional Φ_ω besteht also in 2. Ordnung in ξ_ω/L aus einem Raumanteil (s. Gl. (60)) und dem Oberflächenanteil Ψ_ω. Den Oberflächenanteil Ψ_ω wollen wir nun bei der hier vorgenommenen Näherung nur bis zur ersten Ordnung in ξ_ω/L berücksichtigen. Gründe für dieses Vorgehen werden sich im nächsten Abschnitt bei der Behandlung reiner Supraleiter zeigen. Es sei hier darauf hingewiesen, daß die erste Ordnung die niedrigste ist, in welcher der Oberflächenanteil Ψ_ω berücksichtigt werden muß, damit bei dem in Gl. (60) vorgegebenen Raumanteil das Funktional Φ_ω reell ist bei jeder Wahl von Δ . Mit (60), (72), (59) und (40) erhalten wir so für Φ_ω:

$$\Phi_\omega = 4\pi \int_{S\mathcal{Z}} d^3r\, \Delta(r)^*\Big(1+\frac{v_F^2}{6|\omega|(2|\omega|+v_F/\ell_{tr})}\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\Big)\cdot \qquad (73)$$
$$\cdot\Delta(r)$$

$$+ 4\pi \frac{v_F^2}{6|\omega|(2|\omega|+v_F/\ell_{tr})} \int_{\sigma S\mathcal{Z}} d^2s\, \Delta(\underline{s})^*\, \underline{n}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\, \Delta(\underline{s}) \ .$$

Es ist

$$\ell_{tr} = \frac{\ell\cdot\sigma}{\sigma-\sigma^{(1)}} \ . \qquad (74)$$

Im Abschnitt 5 wird dieser Ausdruck für ϕ_ω für den Fall des reinen Supraleiters mit einfacheren Mitteln bestätigt werden. Aus den Gleichungen (50) und (73) ergibt sich

$$\phi^{(2)} = N_0 \int_{S\mathcal{L}} d^3r \left\{ -\frac{T_c - T}{T_c} |\Delta(r)|^2 + \right. \tag{75}$$
$$\left. + \chi(\xi_{\omega_0}/\ell_{tr}) \frac{7\zeta(3)}{12} \xi_{\omega_0}^2 (\tilde{\partial}\Delta(r))^* (\tilde{\partial}\Delta(r)) \right\}$$

mit $\chi(\xi_{\omega_0}/\ell_{tr})$ nach Gl. (8).

Dabei wurde die Regel (65) der eichinvarianten partiellen Integration benutzt sowie die BCS-Identität:

$$\frac{1}{N_0 g} - \sum_\omega \frac{\omega_0}{|\omega|} = \ln \frac{T}{T_c} . \tag{76}$$

Wir spezialisieren nun die Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ der Konkurrenzfunktionen $\Delta(r)$ als Gesamtheit der im Supraleiter beschränkten Lösungen der in der Einleitung genannten Differentialgleichung (7):

$$(\lambda + \tilde{\partial} \cdot \tilde{\partial}) \Delta(r) = 0 \tag{77}$$

mit

$$\lambda = \frac{12}{7\zeta(3)} \chi(\xi_{\omega_0}/\ell_{tr})^{-1} \xi_{\omega_0}^{-2} \frac{T_c - T}{T_c} . \tag{78}$$

Die charakteristische Länge L dieser Funktionen ist

$$L = \lambda^{-\frac{1}{2}} . \tag{79}$$

Da wir von den Konkurrenzfunktionen $\Delta(r)$ verlangen, daß $L \gg \xi_{\omega_0}$, gelten die aus dieser Spezialisierung von $\mathfrak{K}(T, H_a)$

gezogenen Schlußfolgerungen nur im Temperaturbereich

$$\sqrt{(T_c - T)/T_c} \ll \sqrt{\chi\,(\xi_{\omega_o}/\ell_{tr})}\,. \tag{80}$$

Nun ist im Phasenübergang $\phi^{(2)}$ stationär in $\mathcal{L}(T, H_a)$. Statt in $\mathcal{L}(T, H_a)$ zu variieren, können wir unter der Nebenbedingung

$$\int_{S\mathcal{L}} d^3r\, [(\lambda + \tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\,\Delta(\mathbf{r})]^*[(\lambda + \tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\,\Delta(\mathbf{r})] = 0 \tag{81}$$

frei nach $\Delta(\mathbf{r})$ variieren. Mit dem Lagrange'schen Parameter Λ ergibt die Stationaritätsbedingung (34) bei Variation von $\phi^{(2)}$ (Gl. (75)) nach $\Delta(\mathbf{r})^*$:

$$\begin{aligned}\int_{S\mathcal{L}} d^3r \Big\{ &(\lambda\Delta(\mathbf{r}) + \Lambda\lambda\,(\lambda + \tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\,\Delta(\mathbf{r}))\,\delta\Delta(\mathbf{r})^* \\ &+ \tilde{\underline{\partial}}\,\Delta(\mathbf{r})\cdot\delta(\tilde{\underline{\partial}}\Delta(\mathbf{r}))^* + \\ &+ \Lambda(\lambda + \tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\,\Delta(\mathbf{r})\cdot\delta(\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\,\Delta(\mathbf{r}))^*\Big\} = 0\,.\end{aligned} \tag{82}$$

Mit (77) und mit einer eichinvarianten partiellen Integration (65) erhalten wir daraus die Randbedingung (9).

Für die linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung für Supraleiter mit Zusätzen haben wir so die übliche Randbedingung (9) bestätigt, unter Berücksichtigung der mikroskopischen Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche für die Leitungselektronen. Die Ausmaße des Supraleiters waren dabei als groß gegen die Reichweite ξ_K vorausgesetzt worden, welche kleiner

ist als ξ_{ω_c} und im schmutzigen Grenzfall von der Größenordnung $\sqrt{\xi_{\omega_0} \cdot \ell}$.

An dem besonderen Fall e i n e r ebenen Oberfläche ((y,z)-Ebene) und eines zu dieser parallelen äußeren Feldes $\text{rot}\, \underline{A}_a = H_a \hat{\underline{z}}$ ($\hat{\underline{z}}$ Einheitsvektor in z-Richtung) läßt sich die Herleitung der Randbedingung (9) aus den Bedingungen (33) und (34) für den Phasenübergang und aus dem Ausdruck (75) für das Funktional $\phi^{(2)}$ explizit verfolgen. Man wird in diesem Fall als Klasse der Konkurrenzfunktionen nicht die ganze Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung (77) mit λ aus Gl. (78) (mit $\underline{A} = \underline{A}_a$ wegen (33)) wählen, sondern der Einfachheit halber - mit der Eichung $\underline{A}_a = (x - x_0) H_a \hat{y}$ - die Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ weiter einschränken auf Funktionen der Form

$$\Delta(r) = \alpha\, \varphi(x)\, e^{iky} \tag{83}$$

(α, $\varphi(x)$ und k reell).

$\varphi(x)$ ist dann eine für $x \to +\infty$ beschränkte Lösung der Differentialgleichung

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + (2e H_a (x - x_0) + k)^2 \right\} \varphi(x) = \lambda \varphi(x) \tag{84}$$

mit λ nach Gl. (78), also (bis auf einen Faktor)

$$\varphi(x) = \\ = U\left(\frac{\lambda}{2eH_a};\ \sqrt{2eH_a} \cdot x - \left(\sqrt{2eH_a} \cdot x_0 - \frac{1}{\sqrt{2eH_a}} k\right)\right), \tag{85}$$

wenn mit $U(\varepsilon,\xi)$ die irgendwie normierte, für $\xi \to +\infty$ beschränkte Lösung der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\right) U(\varepsilon,\xi) = \varepsilon\, U(\varepsilon,\xi) \qquad (86)$$

bezeichnet wird.

Für $\phi^{(2)}$ erhält man aus Gl. (75) mit einer eichinvarianten partiellen Integration und durch Einsetzen der Differentialgleichung (77) mit λ nach Gl. (78):

$$\phi^{(2)} = -N_0\,\chi(\xi_{\omega_0}/\ell_{tr})\,\frac{7\zeta(3)}{12}\,\xi_{\omega_0}^2\,\alpha^2\sqrt{2eH_a}\cdot\left(\int_{OS\mathcal{L}} d^2s\right)\cdot$$
$$\cdot\, U\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right)\cdot \qquad (87)$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\, U\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right).$$

$\mathcal{L}(T,H_a)$ ist im vorliegenden Fall eine zweidimensionale Funktionenschar mit den unabhängigen Parametern α und k. Die Bedingung (34) besagt also hier, daß im Phasenübergang die partiellen Ableitungen von $\phi^{(2)}$ nach α und nach k verschwinden, d.h. daß für $H_a = H_c = H_{c3}$ gilt:

$$U\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right)\cdot \qquad (88)$$
$$\cdot\,\frac{\partial}{\partial\xi}\, U\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right)$$
$$= 0\,,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\, u\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right)\right\}^2 +$$

$$+ \left\{\left(\sqrt{2eH_a}\cdot x_0 - \frac{1}{\sqrt{2eH_a}}\, k\right)^2 - \frac{\lambda}{2eH_a}\right\}\cdot \qquad (89)$$

$$\cdot \left\{u\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right)\right\}^2 = 0 .$$

Hieraus folgt $\frac{\partial}{\partial\xi}\, u\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \frac{k}{\sqrt{2eH_a}} - \sqrt{2eH_a}\cdot x_0\right) = 0$ und daraus mit der Beziehung (83) und mit Gl. (85) unmittelbar die Randbedingung (9); denn es ist in der gewählten Eichung $\underline{n}\cdot\tilde{\underline{\partial}} = \partial_x$.

Aus den Gleichungen (88) und (89) kann die kritische Feldstärke H_{c3} berechnet werden. Saint James und de Gennes berechnen sie allein aus der Gl. (88): sie charakterisieren dabei H_{c3} als die größte der Feldstärken H_a , für welche die Gl. (88) erfüllt werden kann. Drückt man diese Bedingung dadurch aus, daß man die Ableitung der durch Gl. (88) implizit gegebenen Funktion $H_a = H_a(k)$ nach k gleich null setzt, so erhält man gerade die Bedingung (89).
Die von Saint James und de Gennes berechnete kritische Feldstärke H_{c3} ist also identisch mit der durch Gln. (88) und (89) gegebenen.

5. Ableitung der Randbedingungen für die verallgemeinerte und linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung 4. Ordnung bei reinen Supraleitern

Im reinen Fall vereinfacht sich die eichinvariante Boltzmanngleichung (3) zu:

$$\left(1 + \xi_\omega \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}}\right) f_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) = f_{t=0}(\underline{k}, \underline{r}) \,. \tag{90}$$

Die Greenfunktion e_ω läßt sich explizit angeben. Daher kann ϕ_ω (Gl. (49)) in diesem Fall explizit berechnet werden. Wir beschränken uns auf Supraleiter, welche den Halbraum $X>0$ ausfüllen, mit der Oberfläche $X=0$. Die Ergebnisse werden auf alle konvex geformten Supraleiter anwendbar sein, deren charakteristische Maße (Durchmesser, Krümmungsradien) groß sind gegen ξ_{ω_0}.

Die Greenfunktion zu (90) und den Randbedingungen (35) und (36) für einen Supraleiter mit einer ebenen Oberfläche ist

$$\begin{aligned} e_\omega(\hat{\underline{k}}, \underline{r}; \hat{\underline{k}}', \underline{r}') = {} & \xi_\omega^{-1} \delta^2(\hat{\underline{k}}, \widehat{\underline{r}-\underline{r}'})\, g(|\underline{r}-\underline{r}'|) \cdot \\ & \cdot e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{r}')} \delta^2(\widehat{\underline{r}-\underline{r}'}, \hat{\underline{k}}') \\ & + \xi_\omega^{-1} \int_{\sigma S \mathcal{L}} d^2 s \left\{ \delta^2(\hat{\underline{k}}, \widehat{\underline{r}-\underline{s}})\, g(|\underline{r}-\underline{s}|)\, e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{s})} \right\} \cdot \\ & \cdot g(\widehat{\underline{r}-\underline{s}}, \widehat{\underline{s}-\underline{r}'}) \left\{ g(|\underline{s}-\underline{r}'|)\, e^{2i\varphi(\underline{s},\underline{r}')} \delta^2(\hat{\underline{k}}, \widehat{\underline{s}-\underline{r}'}) \right\}. \end{aligned} \tag{91}$$

Dabei ist

$$g(|\underline{r}-\underline{r}'|) = \frac{e^{-|\underline{r}-\underline{r}'|/\xi_\omega}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \,, \tag{92}$$

$$\varphi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -e\int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} d^1\mathbf{r}''\,\underline{A}(\mathbf{r}''). \tag{93}$$

Das Integral (93) ist über die gerade Verbindung zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ zu nehmen. Weiter ist in (91)

$$\varsigma(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}') = \underline{n}\cdot\underline{k}\;\omega(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}'). \tag{94}$$

$\hat{\underline{a}}$ bezeichnet den Einheitsvektor $\underline{a}/|\underline{a}|$. Die beiden Summanden in (91) repräsentieren die möglichen klassischen Bahnen von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r}'$, der erste die direkte gerade Verbindung, der zweite diejenigen Bahnen, welche eine Reflexion an der Supraleiter-Oberfläche enthalten. Im Falle des nirgends begrenzten Supraleiters würde die Greenfunktion aus dem ersten Summanden allein bestehen. Den Beweis für (91) geben wir im Anhang A1.

Nach Definition (49) ist nun

$$\begin{aligned}\phi_\omega = {}& \xi_\omega^{-1}\int_{S\mathcal{L}} d^3\mathbf{r}\int_{S\mathcal{L}} d^3\mathbf{r}'\,\Delta(\mathbf{r})^* g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,e^{2i\varphi(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\Delta(\mathbf{r}') \\ &+ \xi_\omega^{-1}\int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2\mathbf{s}\int_{S\mathcal{L}} d^3\mathbf{r}\int_{S\mathcal{L}} d^3\mathbf{r}'\,[\Delta(\underline{\mathbf{r}})^* e^{2i\varphi(\mathbf{r},\underline{\mathbf{s}})}\cdot \\ &\cdot g(|\mathbf{r}-\underline{\mathbf{s}}|)]\cdot \\ &\cdot\varsigma(\widehat{\mathbf{r}-\underline{\mathbf{s}}},\widehat{\underline{\mathbf{s}}-\mathbf{r}'})[g(|\underline{\mathbf{s}}-\mathbf{r}'|)\,e^{2i\varphi(\underline{\mathbf{s}},\mathbf{r}')}\Delta(\mathbf{r}')].\end{aligned} \tag{95}$$

Sei $\Theta(x)$ die Stufenfunktion:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x>0, \\ 0 & \text{für } x<0. \end{cases} \tag{96}$$

Wir führen in das erste Integral in (95) die Identität

$\Theta(x'-x)+\Theta(x-x')\equiv 1$ ein:

$$\Phi_\omega = \xi_\omega^{-1}\int_{S\mathcal{L}} d^3r \int_{S\mathcal{L}} d^3r'\,\Theta(x'-x)\,\Delta(r)^*\,g(|r-r'|)\cdot \cdot\{\Delta(r')\,e^{2i\varphi(r,r')}\}$$

$$+\xi_\omega^{-1}\int_{S\mathcal{L}} d^3r \int_{S\mathcal{L}} d^3r'\,\Theta(x-x')\,\Delta(r')\,g(|r'-r|)\cdot \cdot\{\Delta(r)\,e^{2i\varphi(r',r)}\}^* \qquad (97)$$

$$+\xi_\omega^{-1}\int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s \int_{S\mathcal{L}} d^3r \int_{S\mathcal{L}} d^3r'\,\{\Delta(r)\,e^{2i\varphi(r,s)}\}^* g(|r-s|)\cdot \cdot\varrho(\widehat{r-s},\widehat{s-r'})\,g(|s-r'|)\{\Delta(r')\,e^{2i\varphi(s,r')}\}\,.$$

Es wurde $\varphi(r,r') = -\varphi(r',r)$ benutzt. Das zweite Integral ist zum ersten konjugiert komplex. Aus (97) wird mit $d^3r' = d\Omega\,\varrho^2 d\varrho$ im ersten Integral usw.:

$$\Phi_\omega = \xi_\omega^{-1}\int_{S\mathcal{L}} d^3r\,\Delta(r)^*\int_D d\Omega\,\{\int_0^\infty d\varrho\, e^{-\varrho/\xi_\omega}\Delta(r+\varrho\hat{k})\cdot \cdot e^{2i\varphi(r,r+\varrho\hat{k})}\} + \text{c.c.}$$

$$+\xi_\omega^{-1}\int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s \int_D d\Omega \int_D d\Omega'\,\{\int_0^\infty d\varrho\, e^{-\varrho/\xi_\omega}\Delta(s+\varrho\hat{k})\cdot \cdot e^{2i\varphi(s,s+\varrho\hat{k})}\}^*\cdot\varrho(\hat{k},\hat{k}')\cdot \cdot\{\int_0^\infty d\varrho'\, e^{-\varrho'/\xi_\omega}\Delta(s+\varrho'\hat{k}')\,e^{2i\varphi(s,s+\varrho'\hat{k}')}\}\,. \qquad (98)$$

Das Zeichen $\int_D d\Omega$ soll bedeuten, daß über alle Richtungen mit $n\cdot\hat{k}>0$ integriert werden soll, also über alle in den Supraleiter hinein weisenden Richtungen. Diese Begrenzung der $d\Omega$-Integration rührt im ersten Integral von der Stufenfunktion $\Theta(x'-x)$ her, im zweiten von der Eigenschaft (37) des Reflexionskerns $\omega(\hat{k},\hat{k}')$ (vgl. Def. (94)). Man kann sich in Gl. (98) leicht davon überzeugen, daß Φ_ω reell ist, unabhängig von der Wahl der Funktion $\Delta(r)$, wie es nach der Definition (49) von

Φ_ω und der von $K_\omega(\underline{r},\underline{r}')$,(2), sein muß; es ist nämlich wegen der Eigenschaft (39) des Reflexionskernes $\omega(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')$ (s. Def. (94)):

$$\varrho(\hat{\underline{k}},-\hat{\underline{k}}') = \varrho(\hat{\underline{k}}',-\hat{\underline{k}}) \,. \tag{99}$$

Im Anhang A2 beweisen wir:

$$\frac{d^n}{d\varrho^n}\left(\Delta(\underline{r}+\varrho\hat{\underline{k}})\, e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{r}+\varrho\hat{\underline{k}})}\right)\Big|_{\varrho=0} = \tag{100}$$

$$= (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{r}) \,.$$

Es ist also

$$\Delta(\underline{r}+\varrho\hat{\underline{k}})\, e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{r}+\varrho\hat{\underline{k}})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n!} (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{r}) \tag{101}$$

und

$$\xi_\omega^{-1} \int_0^\infty d\varrho\; e^{-\varrho/\xi_\omega} \Delta(\underline{r}+\varrho\hat{\underline{k}})\, e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{r}+\varrho\hat{\underline{k}})} = \tag{102}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_\omega\, \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{r})$$

Mit (102) wird aus (98):

$$\Phi_\omega = \int_{S\mathcal{L}} d^3\underline{r}\; \Delta(\underline{r})^* \int_D d\Omega \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_\omega\, \underline{k}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{r}) + \text{c.c.}$$

$$+ \xi_\omega \int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2\underline{s} \int_D d\Omega \int_D d\Omega' \sum_{n,m=0}^{\infty} \{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^m \Delta(\underline{s})\}^* \varrho(\hat{\underline{k}},-\hat{\underline{k}}') \cdot \tag{103}$$

$$\cdot \{(\xi_\omega\, \hat{\underline{k}}'\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{s})\}$$

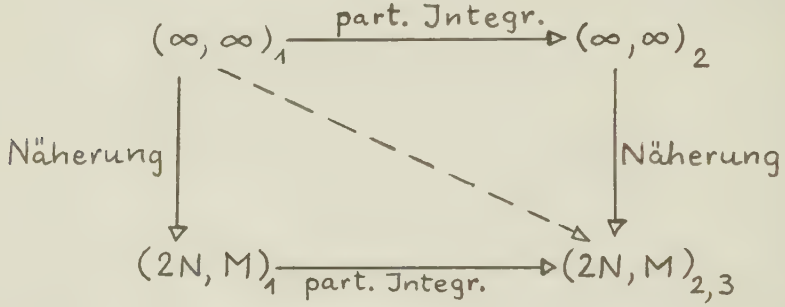
und durch Anwendung der Regel (65) der eichinvarianten partiellen Integration auf das zum ersten Integral in (103) konjugiert komplexe:

$$\Phi_\omega = \int_{S\mathcal{L}} d^3r\, \Delta(r)^* \int d\Omega \sum_{l=0}^{\infty} (\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^{2l}\, \Delta(r)$$
$$+ \int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s \int_D d\Omega \int_D d\Omega' \sum_{m,n=0}^{\infty} \{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^m \Delta(\underline{s})\}^* \cdot$$
$$\cdot \varrho(\hat{\underline{k}}, -\hat{\underline{k}}') \{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}'\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{s})\} \qquad (104)$$
$$- \xi_\omega \int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s \int_D d\Omega\, \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^m \Delta(\underline{s})\}^* \cdot$$
$$\cdot \{(-\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{s})\} \,.$$

Dabei wurde benutzt, daß $\int d\Omega\, (\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(r) = 0$ ist für ungerades n.

Wir wollen nun davon Gebrauch machen, daß die Konkurrenzfunktionen $\Delta(r)$ der Klasse $\mathcal{L}(T, H_a)$ der Funktionen mit einer charakteristischen Länge $L \gg \xi_{\omega_0}$ angehören, und Φ_ω approximieren, indem wir nur Terme bis zu einer bestimmten Ordnung in $\xi_\omega \tilde{\partial}$ mitnehmen. Das Raumintegral in (104) enthält nur Terme gerader Ordnung; in diesem gehen wir also bis zu einer Ordnung 2N. Bis zu welcher Ordnung haben wir nun im Oberflächenintegral in (104) zu gehen? Wenn dort bis zur Ordnung M approximiert wird, wollen wir die Näherung im ganzen als Näherung vom Typ (2N,M) bezeichnen. Nun ist aber ja nicht zu trennen zwischen Raumanteil und Oberflächenanteil von Φ_ω; denn durch eine partielle Integration (65) werden Anteile von Φ_ω vom Raumintegral in das Oberflächenintegral verlagert (oder umgekehrt). Wir verlangen daher bei der Wahl von M, daß eine Näherung des Typs (2N,M) durch eine solche Verlagerung nicht geändert werde, oder mit anderen Worten: daß die Näherung des Typs (2N,M) "invariant" sei gegenüber

partieller Integration. Es zeigt sich, daß dadurch M bis auf eine Alternative festgelegt ist. Zur Erläuterung diene folgendes Schema:



An einer bestimmten Darstellung $(\infty,\infty)_1$ von Φ_ω (z.B. der Darstellung (103) oder der Darstellung (104)) führe man eine partielle Integration aus und gelange so zur Darstellung $(\infty,\infty)_2$. Es sei $(2N,M)_2$ die aus $(\infty,\infty)_2$ gewonnene Näherung des Typs (2N,M). Die aus $(\infty,\infty)_1$ gewonnene Näherung des Typs (2N,M) sei $(2N,M)_1$. Die partielle Integration von $(\infty,\infty)_1$ übernehmen man auf $(2N,M)_1$, d. h. man führe an allen Termen des Raumintegrals von $(2N,M)_1$, welche von der partiellen Integration $(\infty,\infty)_1 \to (\infty,\infty)_2$ betroffen werden, dieselbe partielle Integration durch. Das Ergebnis sei die Darstellung $(2N,M)_3$ von $(2N,M)_1$. Wir verlangen nun (für die Zahlenwerte der Darstellungen):

$$(2N,M)_3 = (2N,M)_2 \quad . \tag{105}$$

Wird z.B. in (104) - das sei jetzt die Darstellung $(\infty,\infty)_4$ von Φ_ω - an allen Termen des Raumintegrals mit $\ell>0$ die partielle Integration

$$\int_{S\mathcal{L}} d^3r\, \Delta^*(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^{2l}\Delta = -\int_{S\mathcal{L}} d^3r\, \{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\Delta\}^*\{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^{2l-1}\Delta\} - \xi_\omega \int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s\, \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, \Delta^*(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^{2l-1}\Delta \quad (106)$$

durchgeführt, so ist

$$(2N,M)_3 - (2N,M)_2 = \sum_{0\le 2l-1\le M} A_l - \sum_{0\le 2l-1\le 2N-1} A_l \quad (107)$$

mit

$$A_l = -\xi_\omega \int_{\sigma S\mathcal{L}} d^2s\, \Delta^* \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\, \{(\xi_\omega \hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^{2l-1}\Delta\},$$

woraus für M folgt:

$$M = 2N-1 \quad \text{oder} \quad M = 2N. \quad (108)$$

Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß eine Näherung des Typs (2N,2N-1) oder des Typs (2N,2N) invariant ist gegen partielle Integration. Man kann sich jede partielle Integration zerlegt denken in sukzessive einzelne partielle Integrationen (65) an einzelnen Summanden. Es handele sich bei $(\infty,\infty)_1 \to (\infty,\infty)_2$ also um eine partielle Integration (65) eines Terms der Ordnung 2N'. Dabei ensteht ein einziges Oberflächenintegral der Ordnung 2N'-1. Ist nun N' > N, so ist (vgl. das Schema mit M = 2N-1 oder M = 2N) offenbar $(2N,M)_1 = (2N,M)_3 = (2N,M)_2$, denn das entstehendeOberflächenintegral wird beim Näherungsschritt $(\infty,\infty)_2 \to (2N,M)_2$ nicht mitgemonnen, und beim Schritt $(2N,M)_1 \to (2N,M)_3$ ist überhaupt keine partielle Integration auszuführen. Ist $N' \leqq N$, so wird das bei $(\infty,\infty)_1 \to (\infty,\infty)_2$ entstehende Oberflächenintegral bei $(\infty,\infty)_2 \to (2N,M)_2$mitgenommen, und bei

$(2N,M)_1 \rightarrow (2N,M)_3$ ensteht ebenfalls nur dieses Oberflächenintegral. Also ist auch dann $(2N,M)_3 = (2N,M)_2$.

Würden im Raumintegral nur Terme von durch vier teilbarer Ordnung stehen, so wäre jede Näherung eines der Typen (4N,4N-1), (4N,4N), (4N,4N+1), (4N,4N+2) gegen partielle Integration invariant. Das sieht man auf dieselbe Weise.

Wir entscheiden uns bei der Näherung von Φ_ω nach folgendem Gesichtspunkt: das Oberflächenintegral wird in der niedrigsten Ordnung genähert, welche für die Invarianz der Näherung von Φ_ω im ganzen gegen partielle Integration notwendig ist. Wir ziehen also nur noch Näherungen vom Typ (2N,2N-1) in Betracht und nennen diese jetzt einfach Näherung der 2Nten Ordnung von Φ_ω.

Die Näherung 2Nter Ordnung von Φ_ω ist reell bei jeder Wahl der Funktion $\Delta(\mathbf{r})$. Denn eine Näherung beliebigen Typs, welche aus der Darstellung (103) gewonnen wird, hat diese Eigenschaft, und jede gegen partielle Integration invariante Näherung kann auch aus dieser Darstellung gewonnen werden.

Die Näherung 2. Ordnung von Φ_ω stimmt überein mit dem Ausdruck (73) im Abschnitt 4, wenn dort ℓ_{tr}^{-1} gleich null gesetzt wird. Um das zu erkennen, hat man die Identität $\int d\Omega (\hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})^2 = \frac{4\pi}{3} \tilde{\underline{\partial}} \cdot \tilde{\underline{\partial}}$ zu benutzen.

Wir können nun das Funktional $\Phi^{(2)}$ in 2Nter Ordnung angeben

(Gln. (50) u. (104)):

$$\Phi^{(2)} = \int_{S\mathfrak{L}} d^3r\, \Delta(r)^* \Big\{ \frac{1}{g}\,\Delta(r) - \frac{N_0 T}{2} \sum_{l=0}^{N} \frac{1}{2|\omega|} \cdot \int d\Omega\, (\xi_\omega\, \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})^{2l} \Delta(r) \Big\}$$

$$- \frac{N_0 T}{2} \int_{\sigma S \mathfrak{L}} d^2 s \Big\{ \int d\Omega \int d\Omega' \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m+n \leq 2N-1}} \sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|}\, \xi_\omega \cdot \tag{109}$$

$$\cdot \big[(\xi_\omega\, \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})^m \Delta(\underline{s}) \big]^* \varrho(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') \big[(\xi_\omega\, \hat{\underline{k}}' \cdot \tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{s}) \big]$$

$$- \int_D d\Omega\, \underline{n} \cdot \hat{\underline{k}} \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m+n \leq 2N-1}} \sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|}\, \xi_\omega \big[(\xi_\omega\, \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})^m \Delta(\underline{s}) \big]^* \cdot$$

$$\cdot \big[(-\xi_\omega\, \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})^n \Delta(\underline{s}) \big] \Big\} .$$

Von jetzt an beschränken wir uns auf die Näherung 4. Ordnung und spezialisieren die Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ der Konkurrenzfunktionen als Klasse derjenigen Funktionen $\Delta(r)$, welche im Supraleiter beschränkt sind und der Differentialgleichung 4. Ordnung

$$\frac{1}{N_0 g} - \frac{T}{2} \sum_{l=0}^{2} \sum_{\omega} \frac{1}{2|\omega|} \int d\Omega\, (\xi_\omega\, \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})^{2l}\, \Delta(r) = 0 \tag{110}$$

genügen, und deren charakteristische Länge groß ist gegen ξ_{ω_0}. Die Differentialgleichung (110) ist identisch mit der in der Einleitung genannten Differentialgleichung (10). Um das zu se-

hen, hat man die BCS-Identität (76) sowie die Identitäten (vgl. [6]):

$$\int d\Omega (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^2 = \frac{4\pi}{3}\,\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}\ ,$$
$$\int d\Omega (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^4 = \frac{4\pi}{5}\left((\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^2 + 4e^2H^2\right) \qquad (111)$$

zu benutzten; die Gültigkeit der zweiten Identität setzt konstantes Magnetfeld voraus, wie es im Phasenübergang ja gegeben ist.

Jede Lösung von (110) bzw. (10) ist Linearkombination von Lösungen der Differentialgleichungen $(\lambda_{1,2} + \tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})u = 0$, wobei $\xi_{\omega_c}^2\lambda_1, \xi_{\omega_c}^2\lambda_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{T_c - T}{T_c} + \frac{31}{20}\zeta(5)\,\xi_{\omega_0}^4 e^2H_a^2 - \frac{7}{12}\zeta(3)\left(\xi_{\omega_0}^2\lambda\right) + \frac{31}{80}\zeta(5)\left(\xi_{\omega_0}^2\lambda\right)^2 = 0 \qquad (112)$$

sind. Nur für eine der Wurzeln, nämlich für

$$\xi_{\omega_0}^2\lambda \approx \frac{12}{7\zeta(3)}\frac{T_c - T}{T_c} + \frac{12\cdot 31}{7\cdot 20}\frac{\zeta(5)}{\zeta(3)}\left(\xi_{\omega_0}^2 e H_a\right)^2 + \frac{12\cdot 31}{7\cdot 80}\frac{\zeta(5)}{\zeta(3)}\left(\frac{12}{7\zeta(3)}\frac{T_c - T}{T_c}\right)^2 \qquad (113)$$

ist die charakteristische Länge $L = \lambda^{-(1/2)}$ der Lösungen der Differentialgleichung $(\lambda + \tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})u(r) = 0$ groß gegen ξ_{ω_0}, und zwar im Temperatur-Bereich

$$\sqrt{(T_c - T)/T_c} \ll 1. \qquad (114)$$

Also ist $\mathfrak{L}(T,H_a)$ im Temperatur-Bereich (114) identisch mit der Gesamtheit der im Supraleiter beschränkten Lösungen der Differentialgleichung $(\lambda+\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\Delta(\underline{r})=0$ mit λ nach Gl. (113).

$\phi^{(2)}$ wurde in 4. Ordnung in ξ_ω/L genähert, das bedeutet: in 4. Odrnung in $\sqrt{(T_c-T)/T_c}$; denn wegen (113) ist $L=\lambda^{-(1/2)}$ von der Größenordnung $\xi_\omega/\sqrt{(T_c-T)/T_c}$. Zusammengefaßt, haben wir für den Phasenübergang 2. Ordnung eines reinen Supraleiters mit Abmessungen groß gegen ξ_{ω_o} folgendes abgeleitet ((109) u. (110)):

Bei gegebener Temperatur T unterhalb T_c im Temperatur-Bereich $\sqrt{(T_c-T)/T_c}\ll 1$ und bei gegebener Richtung $\hat{\underline{h}}$ des Magnetfeldes ist die kritische Feldstärke H_c, genähert bis zur 4. Ordnung in $\sqrt{(T_c-T)/T_c}$, diejenige Feldstärke H_a , für die das Funktional

$$\phi^{(2)}(\Delta,\underline{A}_a)=\frac{N_o T}{2}\int_{o\le x} d^2s\,\Big\{\int d\Omega\int d\Omega'\sum_{\substack{m,n\ge 0\\ m+n\le 3}}\sum_{\omega}\frac{1}{2|\omega|}\cdot$$

$$\cdot\,\varrho(\hat{\underline{k}},-\hat{\underline{k}}')\,\xi_\omega\big[(\xi_\omega\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^m\Delta(\underline{s})\big]^*\big[(\xi_\omega\hat{\underline{k}}'\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n\Delta(\underline{s})\big] \quad (115)$$

$$-\int_D d\Omega\;\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\sum_{\substack{m,n\ge 0\\ m+n\le 3}}\sum_{\omega}\frac{1}{2|\omega|}\,\xi_\omega\big[(\xi_\omega\underline{k}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^m\Delta(\underline{s})\big]^*\cdot$$

mit

$$\cdot\,\big[(-\xi_\omega\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n\Delta(\underline{s})\big]\Big\}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{A}_a=H_a\cdot\hat{\underline{h}}$$

innerhalb der Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung $(\lambda+\tilde{\underline{\partial}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})\Delta(\underline{r})=0$ mit λ aus (113) stationär ist.

Im Funktional $\phi^{(2)}$ tritt der Reflexionskern auf; die kritische Feldstärke H_c wird also in 4. Ordnung in $\sqrt{(T_c-T)/T_c}$ von den Reflexionseigenschaften der Supraleiter-Oberfläche abhängig sein.

Um H_{c3} in 4. Ordnung in $\sqrt{(T_c-T)/T_c}$ zu berechnen, wird man die Geometrie und die Eichung wählen, wie sie am Ende des Abschnitts 4 angegeben wurden: e i n e ebene Oberfläche ((y,z)-Ebene), $\hat{\underline{h}} = \hat{\underline{z}}$, $\underline{A}_a = (x-x_o) H_a \cdot \hat{\underline{y}}$. Die Klasse der Konkurrenzfunktionen, $\mathfrak{K}(T, H_a)$, wird man wieder auf diejenigen für $x \longrightarrow +\infty$ beschränkten Lösungen von $(\lambda + \tilde{\underline{\partial}} \cdot \tilde{\underline{\partial}})\Delta = 0$ mit λ nach (113) beschränken, welche von der Form (83) sind. In der so gewählten Klasse $\mathfrak{K}(T, H_a)$ vereinfacht sich der Ausdruck für $\phi^{(2)}$ (Gl. (115)) zu :

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\pi}{N_o \alpha^2 \xi_{\omega_o}} \phi^{(2)} &= f(k, H_a) = \\
&= u^2 \cdot \Big\{ \frac{15}{2} \zeta(4) \Big(\varrho_{010|010} + \frac{\pi}{4} \Big) \xi_{\omega_o}^2 (eH_a)^2 \chi(k)^2 \\
&\quad + \frac{31}{2} \zeta(5) \Big(\varrho_{010|110} + \frac{2\pi}{5} \Big) \xi_{\omega_o}^3 (eH_a)^2 \chi(k) \Big\} \\
&\quad + 2u \cdot u_\xi \cdot \xi_{\omega_o} \sqrt{2eH_a} \cdot \Big\{ \frac{31}{4} \zeta(5) \Big(2\varrho_{010|110} \\
&\quad + \varrho_{200|100} - \varrho_{020|100} \Big) \xi_{\omega_o}^2 (eH_a)^2 \chi(k)^2 \\
&\quad - \frac{31}{16} \zeta(5) \Big(\varrho_{200|100} + \frac{2\pi}{5} \Big) \xi_{\omega_o}^2 \lambda + \frac{7\pi}{6} \zeta(3) \Big\} \\
&\quad + u_\xi^2 \cdot \xi_{\omega_o}^2 \cdot 2eH_a \cdot \Big\{ \frac{15}{8} \zeta(4) \Big(\varrho_{100|100} + \frac{\pi}{2} \Big) \Big\} \cdot
\end{aligned}
\qquad (116)
$$

Hierbei ist

$$u = u\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \sqrt{2eH_a}\cdot x(k)\right),$$

$$u_\xi = \frac{\partial}{\partial\xi} u\left(\frac{\lambda}{2eH_a}, \sqrt{2eH_a}\cdot x(k)\right),$$

$$x(k) = \frac{k}{2eH_a} - x_0,$$

$$\varrho_{lmn|l'm'n'} = \int d\Omega \int d\Omega' \hat{k}_x^l \hat{k}_y^m \hat{k}_z^n \cdot \varrho(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}')(\hat{k}_x')^{l'}(\hat{k}_y')^{m'}(\hat{k}_z')^{n'} \tag{117}$$

$$(\hat{\underline{k}} = (\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_z))$$

mit $\varrho(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}')$ aus Gl. (94); $u(\varepsilon, \xi)$ ist die (irgendwie normierte) für $\xi \to +\infty$ beschränkte Lösung der Differentialgleichung (86). Für $H_a = H_{c3}$ müssen nun wieder die partielle Ableitung von $\Phi^{(2)}$ nach α und nach k verschwinden; H_{c3} ist also gegeben durch (vgl. Gl. (116)):

$$f(k, H_{c3}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k} f(k, H_{c3}) = 0 \tag{118}$$

Herrn Prof. Lüders bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für wertvolle Ratschläge während ihres Entstehens zu großem Dank verpflichtet. Außerdem schulde ich Herrn Prof. Tewordt Dank für den Hinweis auf das Problem, kritische Feldstärken aus verallgemeinerten und linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichungen in höherer Ordnung in $\sqrt{(T_c - T)/T_c}$ zu berechnen.

Anhang

Wir schicken die folgende durch vollständige Induktion leicht zu beweisende Identität voraus:

$$\left\{\frac{d}{d\varrho} + 2ie\,\underline{k}\cdot\underline{A}(r+\varrho\hat{\underline{k}})\right\}^n f(r+\varrho\hat{\underline{k}}) = \\ = (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}}_{r'})^n f(r')\Big|_{r'=r+\varrho\hat{\underline{k}}} \tag{I}$$

A1. Beweis der Gleichung $\frac{d^n}{d\varrho^n}\Delta(r+\varrho\hat{\underline{k}})\,e^{2i\varphi(r,r+\varrho\hat{\underline{k}})}\Big|_{\varrho=0} = (\hat{\underline{k}}\cdot\tilde{\underline{\partial}})^n\Delta(r)$

Zur Abkürzung sei

$$\Delta(r+\varrho\hat{\underline{k}})\,e^{2i\varphi(r,r+\varrho\hat{\underline{k}})} = D(\varrho) \tag{II}$$

gesetzt. Wir definieren Funktionen $d^{(n)}(\varrho)$ durch:

$$\frac{d^n}{d\varrho^n} D(\varrho) = d^{(n)}(\varrho)\cdot e^{2i\varphi(r,r+\varrho\hat{\underline{k}})} \tag{III}$$

Da gilt:

$$\frac{d}{d\varrho}\varphi(r,r+\varrho\hat{\underline{k}}) = e\cdot\hat{\underline{k}}\cdot\underline{A}(r+\varrho\hat{\underline{k}}), \tag{IV}$$

ist

$$d^{(n+1)}(\varrho) = \left\{\frac{d}{d\varrho} + 2ie\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{A}(r+\varrho\hat{\underline{k}})\right\} d^{(n)}(\varrho), \tag{V}$$

also

$$d^{(n)}(\varrho) = \left\{\frac{d}{d\varrho} + 2ie\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{A}(r+\varrho\hat{\underline{k}})\right\}^n d^{(0)}(\varrho). \tag{VI}$$

Nach Definition ist $d^{(6)}(\varrho) = \Delta(\underline{r} + \varrho\hat{\underline{k}})$. Die zu beweisende Gleichung folgt aus (VI) und (III) mit $\varrho = 0$ (siehe (I)).

A2 . Herleitung der Greenfunktion zur eichinvarianten Boltzmanngleichung für reine Leiter

Wir geben zunächst die Lösung der eichinvarianten Boltzmanngleichung für reine Supraleiter in der nicht Laplace-transformierten Form:

$$\begin{aligned} (\partial_t + v_F \hat{\underline{k}} \cdot \tilde{\underline{\partial}}) f_t(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) &= 0 , \\ f_{t=0}(\hat{\underline{k}}, \underline{r}) &= f(\hat{\underline{k}}, \underline{r}), \end{aligned} \tag{VII}$$

für einen Halbraum $\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0) \geqslant 0$ an, welche der Randbedingung

$$f_t(\hat{\underline{k}}, \underline{s}) = \int d\Omega' w(\hat{\underline{k}}, \hat{\underline{k}}') f_t(\hat{\underline{k}}', \underline{s}) \tag{VIII}$$

genügt und für $|\underline{r}| \to \infty$ beschränkt bleibt. Natürlich muß dazu auch $f(\hat{\underline{k}}, \underline{r})$ der Randbedingung (VIII) genügen und für $|\underline{r}| \to \infty$ beschränkt bleiben. Für einen Punkt $\underline{r}_1$ des Halbraumes und eine Richtung $\hat{\underline{k}}$, die in den Halbraum hinein weist $(\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}} \geqslant 0)$, sei $\underline{s}(\hat{\underline{k}}, \underline{r}_1)$ der Punkt der Oberfläche $\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)=0$ des Halbraumes, in welchem die Oberfläche von der in $\underline{r}_1$ beginnenden, in Richtung $-\hat{\underline{k}}$ verlaufenden Halbgeraden durchstoßen wird, und sei $t(\hat{\underline{k}}, \underline{r}_1) = |\underline{s}(\hat{\underline{k}}, \underline{r}_1) - \underline{r}_1| / v_F$. Mit $\Theta(t)$ werde die Stufenfunktion bezeichnet. Ohne Feld $(\underline{A}(\underline{r}) \equiv 0)$ ist:

$$f_t(\hat{\underline{k}},\underline{r}) = \begin{cases} f(\hat{\underline{k}},\underline{r}-v_F t\,\hat{\underline{k}}), \text{ wenn } \underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}<0, \\ f(\hat{\underline{k}},\underline{r}-v_F t\,\hat{\underline{k}})\cdot\Theta(t(\hat{\underline{k}},\underline{r})-t)+ \\ +\int d\Omega'\, w(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\, f(\hat{\underline{k}}', \underline{s}(\hat{\underline{k}},\underline{r})- \\ \quad -v_F(t-t(\hat{\underline{k}},\underline{r}))\cdot\hat{\underline{k}}')\cdot\Theta(t-t(\hat{\underline{k}},\underline{r})) \text{ sonst.} \end{cases} \tag{IX}$$

Folglich ist die Greenfunktion im feldfreien Fall:

$$e_t(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}') = \delta^2(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\,\delta^3(\underline{r}-\underline{r}'-v_F t\,\hat{\underline{k}}') + \\ + v_F\int_0^t dt'\int d^2s\;\delta^3(\underline{r}-\underline{s}-v_F\cdot(t-t')\cdot\hat{\underline{k}})\cdot \\ \cdot\,\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\;w(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\,\delta^3(\underline{s}-\underline{r}'-v_F t'\hat{\underline{k}}'). \tag{X}$$

Die Anwesenheit des Feldes ist nun wegen (I) einfach dadurch zu berücksichtigen, daß überall in (IX) $f(\hat{\underline{k}}'',\underline{r}''-v_F t''\hat{\underline{k}}'')$ ersetzt wird durch $f(\hat{\underline{k}}'',\underline{r}''-v_F t''\hat{\underline{k}}'')\cdot e^{2i\varphi(\underline{r}'',\,\underline{r}''-v_F t''\hat{\underline{k}}'')}$. Bei Anwesenheit eines Feldes wird also aus (X):

$$e_t(\hat{\underline{k}},\underline{r};\hat{\underline{k}}',\underline{r}') = \delta^2(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\,\delta^3(\underline{r}-\underline{r}'-v_F t\,\hat{\underline{k}}')\cdot \\ \cdot e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{r}')} \\ + v_F\int_0^t dt'\int d^2s\;\delta^3(\underline{r}-\underline{s}-v_F\cdot(t-t')\cdot\hat{\underline{k}})\cdot e^{2i\varphi(\underline{r},\underline{s})}\cdot \\ \cdot\,\underline{n}\cdot\hat{\underline{k}}\;w(\hat{\underline{k}},\hat{\underline{k}}')\,\delta^3(\underline{s}-\underline{r}'-v_F t'\hat{\underline{k}}')\cdot e^{2i\varphi(\underline{s},\underline{r}')}. \tag{XI}$$

Die Laplace-Transformation $e_\omega = \int_0^\infty 2|\omega|dt\; e^{-2|\omega|t} e_t$ führt den Ausdruck (XI) über in den Ausdruck (91) des Abschnitts 5.

Lebenslauf

Am 16. April 1937 wurde ich, Eckhard Schöler, als Sohn des kaufmännischen Angestellten Paul Schöler und seiner Ehefrau Gerda, geb. Pohle, in Bochum in Westfalen geboren. Meine Schulausbildung erhielt ich hauptsächlich in Berlin. 1956 begann ich das Studium der Mathematik und der Physik in Berlin. Bis 1961 studierte ich ausschließlich Mathematik, zwei Jahre in Berlin, drei Jahre in Tübingen. Danach nahm ich das Studium der Physik auf . Mit Ausnahme eines Semesters in Tübingen und eines Semesters in München studierte ich seither in Göttingen. Hier legte ich im Sommer 1965 die Diplomprüfung ab.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren A. Dinghas, B. Huppert, H. Kneser, F.W. Levi, G. Pickert, P. Roquette; A. Flammersfeld, F. Hund, G. Lüders, A. Schlüter, W. Tollmien.